هوالعلیم

Complex numbers and their applications
By: Arash Eslamdoost

عنوان : اعداد مختلط و کاربرد آنها
نویسنده : آرش اسلام دوست

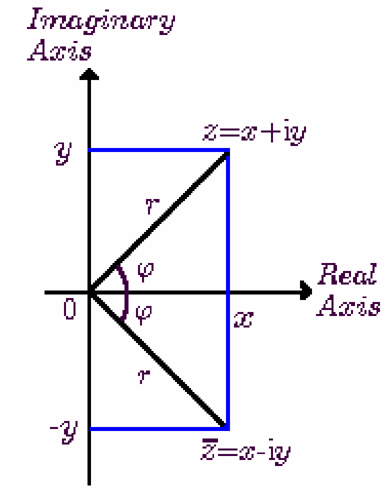
آیا تا بحال به این فکر کرده اید که مفهوم فیزیکی عدد ۱ چیست ؟
اجداد ما فرض کردند که ۱ وجود دارد ولی هیچ فیزیکدانی ثابت نکرد که ۱ بعنوان یک مفهوم فیزیکی وجود دارد. همین فرض باعث بوجود آمدن علم حساب شد. علم هندسه هم به همین ترتیب با مفروض الوجود گرفتن نقطه بوجود آمده است. عدد ۱ وجود حقیقی ندارد و فقط وجودی ذهنی دارد. حال باید دید که آیا تنها فرض وجود ۱ می تواند نیاز انسان را برای حل مشکلات خود برآورده سازد؟
در علوم طبیعی تنها می توان کمیاتی را بصورت حقیقی با هم جمع کرد و یا سایر عملیات جبری را روی آنها انجام داد که همهٔ این کمیتها از یک جنس باشند و کمیات از دو جنس مختلف را نمی توان با هم ترکیب کرد. برای ترکیب آنها یکی را روی محور حقیقی و دیگری را روی محور موهومی نمایش می دهیم و یک کمیت جدید تعریف می کنیم که آن کمیت یک کمیت ترکیبی است؛ مثل کمیت "قد-وزن" : ۸۰+۲i که یعنی فردی با ۸۰kg وزن و ۲m قد. با توجه به این تعاریف ما به یک عبارت ترکیبی(Complex) می رسیم که بیانگر دو عبارت با دو دیمانسیون متفاوت است که با هم ترکیب شده اند.
مطالبی که در بالا آورده شده را می توان به عنوان تعریف کلی از مفهوم اعداد مختلط ذکر کرد. تاریخچهٔ مربوط به این بحث و اینکه بشر به چه دلیل و چگونه این تعریف را ارائه نموده در ادامه آورده شده است.

در طول قرن هجدهم که هنوز تئوری اساسی جبر تثبیت نشده بود و تعریف مشخصی از اعداد مختلط وجود نداشت، جذز عدد ۱- در روابط بسیاری استفاده می شد.
توابع مشخصی که شامل توابع مثلثاتی و نمایی بودند در جواب انتگرالها و معادلات دیفرانسیلی دیده می شوند. اولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) آرایشی از توابع مثلثاتی که بصورت زیر نوشته می شود را مطرح کرد که i بیانگر $\sqrt{-1}$است.

$$e^{ix} = \cos(x) + i.\sin(x)$$

معادله بالا این اجازه را می دهد که بتوان عدد نپر زمانیکه به توان عدد موهومی ix می رسد را بصورت جزء حقیقی cos(x) و موهومیi.sin(x) نشان داد که کمک زیادی به حل معادلات دیفرانسیلی می کند. علاوه بر این، i کاربردهای بسیاری هم داشت که باعث شد که استقاده از این قرارداد برای ریاضی دانها کاملاً قابل قبول شود.

در اواخر قرن ۱۸ استفاده از اعداد به صورت x+i.y که بیانگر یک نقطه از صفحه بود، بسیار معمول شده بود. قراردادی که امروزه برای نمایش این نقطه استفاده می شود، قرار دادن جزء حقیقی این عبارت(x) روی محور x ها و جرء موهومی (y) روی محور y ها می باشد که در شکل زیر نشان داده شده است. همانطور که دیده می شود مقادیر مثبت و منفی برای هر کدام از محورها بترتیب راست و چپ ، بالا و پایین می باشد.



این روش قرار داد به افراد مختلفی از جمله Argand ،Wessel و Gauss نسبت داده می شود.

تا اواخر قرن ۱۸ هنوز شکل تمامی جوابهای معادلات چند جمله ای شناخته نشده بود. در سال ۱۷۹۹ Gauss اولین مقاله خود را برای اثبات اینکه معادله چند جمله ای مرتبه n دارای n ریشه به شکل a+i.b می باشد را ارائه نمود. در این رابطه a جزء حقیقی و b جزء موهومی می باشد.

آیا جبر حاکم بر اعداد مختلط با جبر حاکم بر اعداد موهومی یکی است ؟

جواب این سوال را می توان در روابط زیر یافت.

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{1}.\sqrt{1} \quad \rightarrow \quad -1=1$$

می بینیم که استفاده از جبر حاکم بر اعداد حقیقی برای عدد موهومی $\sqrt{-1}$ منجر به یک تناقض می شود. بنابراین نباید جبر حاکم بر اعداد حقیقی و مختلط را برای هم بکار برد.

کاربرد اعداد مختلط

شرح بعضی از کاربردهای اعداد مختلط بصورت خلاصه آورده شده است.

تئوری کنترل :

در تئوری کنترل معمولاً سیستمها از فضای زمان توسط تبدیل لاپلاس به فضای دیگری انتقال پیدا می کنند که در این فضا، معادلات دیفرانسیل بصورت جبری بیان می شوند.

پردازش سیگنال :

اعداد مختلط برای پردازش سیگنالها به عنوان یک تعریف واضح از سیگنالهای با تغییرات نوسانی استفاده می شود. اندازه Z $(|Z|)$ برای تعریف دامنه و آرگومان Z $(\arg(Z))$ برای تعریف فاز یک موج سینوسی با فرکانس معلوم استفاده می شود.

اگر آنالیز فوریه برای نوشتن مقدار خطی یک سیگنال مشخص به صورت مجموع توابع تناوبی استفاده شود، این توابع تناوبی اغلب به شکل جز حقیقی توابع مختلط به صورت $f(t)=Ze^{i\omega t}$ ، نوشته می شوند که در آن ω نشان دهنده سرعت زاویه ای و عدد مختلط Z بیانگر فاز و دامنه می باشد.

مکانیک کوانتم :

اهمیت اعداد مختلط در مکانیک کوانتم ، بخاطر این است که این تئوری بر اساس فضای بینهایت بعدی هیلبرت(Hilbert) پایه گذاری شده است.

تئوری نسبیت :

در نسبیت عام و خاص می توان با موهومی گرفتن بعضی متغیرها در فضای زمانی به روابط ساده تری رسید.

معادلات دیفرانسیل :

در معادلات دیفرانسیل معمول است که ابتدا ریشه های مختلط r برای معادله ساختاری مربوط به یک معادله دیفرانسیل خطی را پیدا کرد و سپس در حل سیستم، از تابع اساسی به شکل $f(t)=e^{rt}$ استفاده کرد.

مکانیک سیالات :

از توابع مختلط برای حل جریان پتانسیل دوبعدی استفاده می شود.

منابع و مراجع :

[۱] جلسه آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی مورخ ۱۳۸۴/۹/۲۰

[۲] http://en.wikipedia.org

[۳] http://www.clarku.edu

[۴] http://www.sosmath.com